



NORTH AMERICAN COLLEGE

HACIA UN FUTURO CON FE

BUILD YOUR FUTURE WITH FAITH

Función Exponencial y Función Logarítmica

Maritza Reyes Palma
Profesora Matemática y Física

Guillermo Ortiz Munizaga
Profesor Matemática





Aprendizajes Esperados

- Calcular logaritmos.
- Aplicar las propiedades de logaritmos en ejercicios propuestos.
- Reconocer las funciones exponencial y logarítmica una como inversa de la otra.
- Analizar comportamiento gráfico y analítico de las funciones exponencial y logarítmica.
- Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.





Función Exponencial

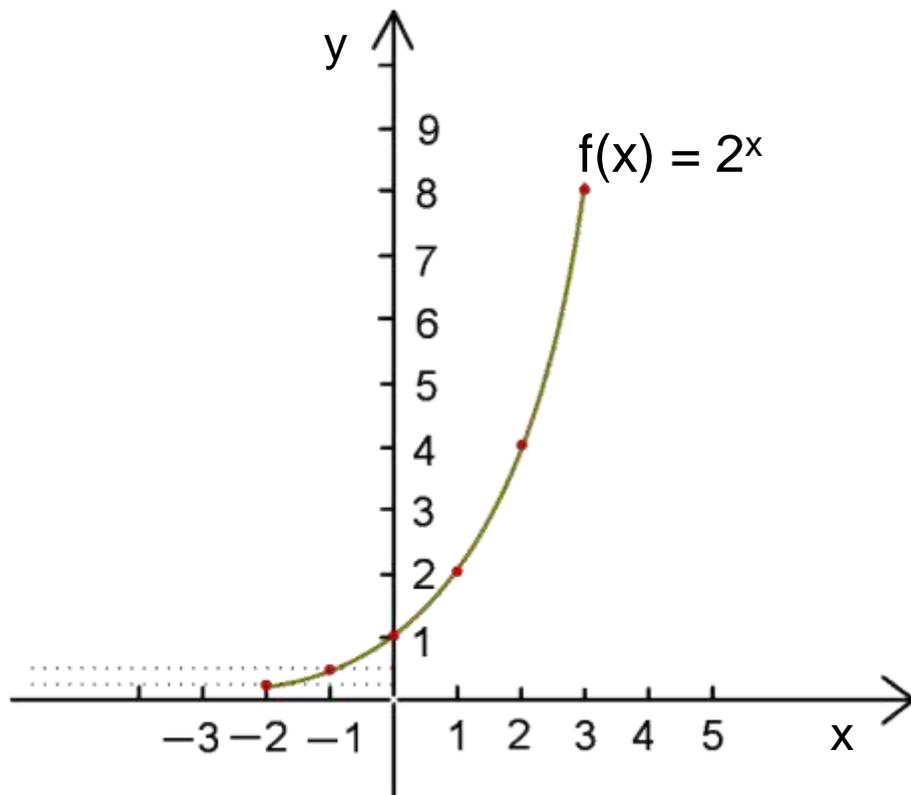
Definición:

Es de la forma:

$$f(x) = a^x$$

con $a > 0$, $a \neq 1$ y $x \in \mathbb{R}$

Ejemplo 1: La gráfica de $f(x) = 2^x$ es:



$$f(0) = 2^0 = 1$$

$$f(1) = 2^1 = 2$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

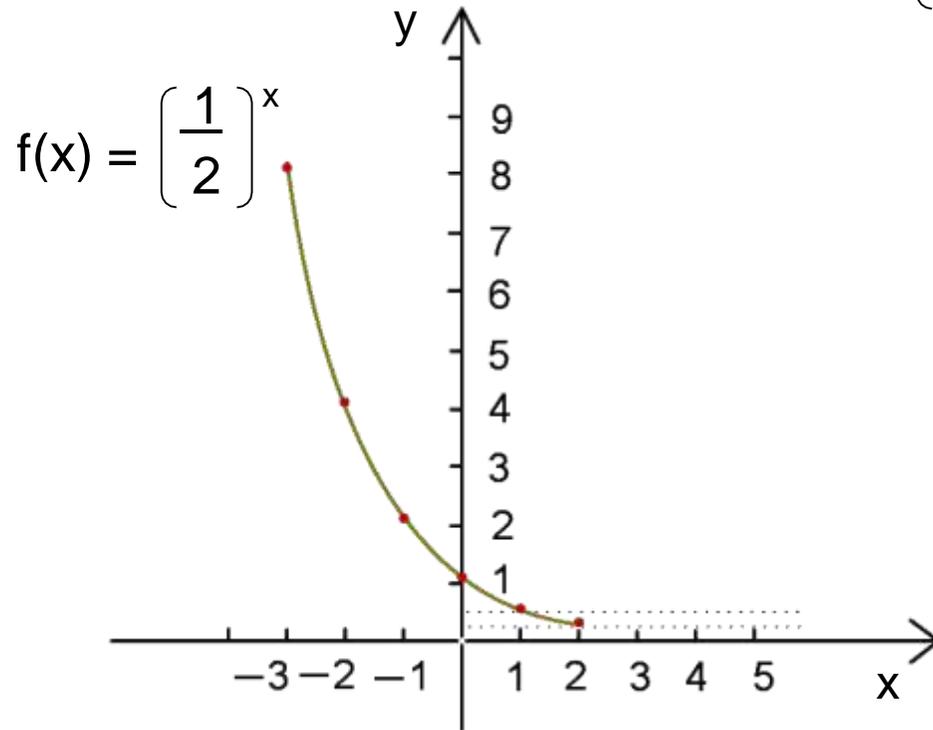
$$f(3) = 2^3 = 8$$

$$f(-1) = 2^{-1} = 0,5$$

$$f(-2) = 2^{-2} = 0,25\dots$$



Ejemplo 2: La gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ es:



$$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

$$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

Al igual que en la función anterior se tiene que:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

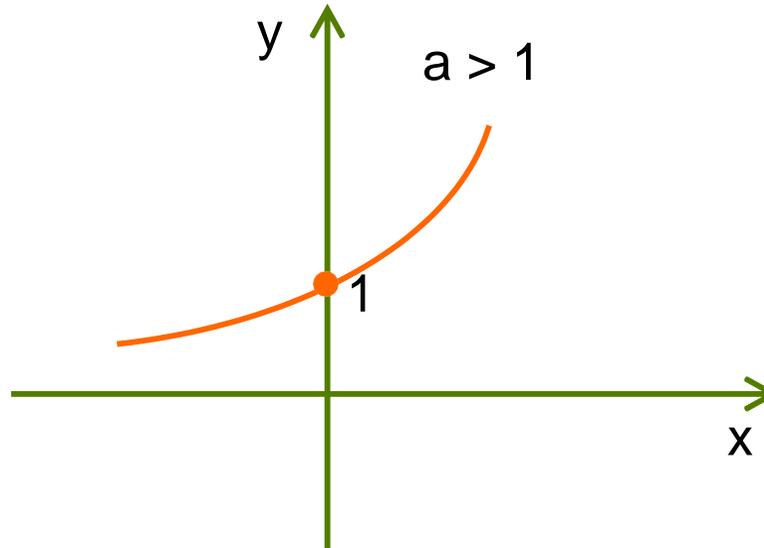
$$\text{Rec}(f) = \mathbb{R}^+$$





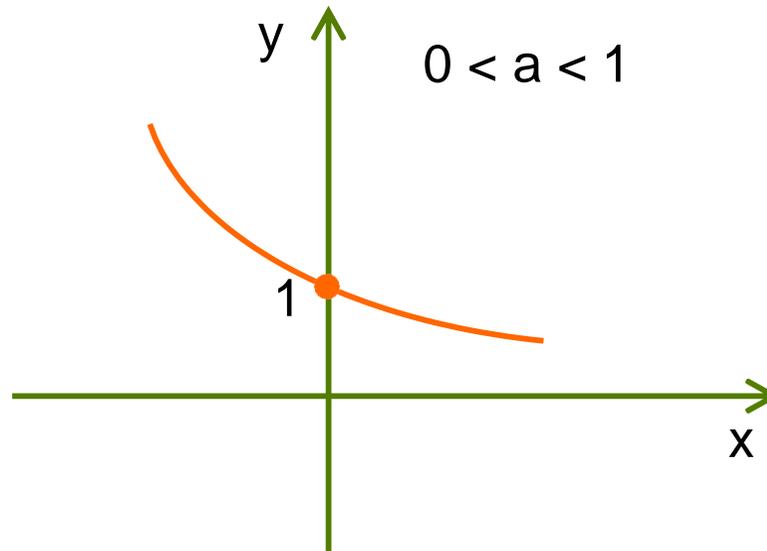
Ley de Crecimiento y Decrecimiento Exponencial

a.) Si $a > 1$, $f(x) = a^x$ es creciente en todo \mathbb{R}





b.) Si $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ es decreciente en todo \mathbb{R}



Notar que la gráfica de $f(x) = a^x$ pasa por $(0, 1)$





Ejemplo

Determine la función que representa el número de bacterias que hay en una población, después de x horas, si se sabe que inicialmente había 10.000 bacterias, y que la población se triplica cada una hora.

Solución:

Cantidad inicial = 10.000

Después de: 1 hora = $10.000 \cdot 3 = 10.000 \cdot 3^1 = 30.000$

2 horas = $10.000 \cdot 3 \cdot 3 = 10.000 \cdot 3^2 = 90.000$

3 horas = $10.000 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 10.000 \cdot 3^3 = 270.000 \dots$

Después de x horas = $10.000 \cdot 3^x$

Por lo tanto, la función que representa el número de bacterias después de x horas es:

$$f(x) = 10.000 \cdot 3^x$$

En general $f(x) = C \cdot k^x$, donde C = cantidad inicial, k = variación y x = tiempo





Logaritmos

Definición:

$$\log_a(b) = n \Leftrightarrow a^n = b$$

“ **n** es logaritmo de **b** en base **a**”, con $b > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$

Ejemplo:

$$\log_2(8) = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_3(5) = m \Leftrightarrow 3^m = 5$$

$$\log_4(64) = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$$

$$\log_{10}(0,1) = -1 \Leftrightarrow 10^{-1} = 0,1$$





Propiedades:

a.) Logaritmo de la base:

$$\log_a (a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^1 = a$$

Ejemplo:

$$\log_8 (8) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8^1 = 8$$

b.) Logaritmo de la unidad:

$$\log_a (1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^0 = 1$$

Ejemplo:

$$\log_9 (1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9^0 = 1$$





c.) Logaritmo del producto:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a (b) + \log_a (c)$$

Ejemplo:

$$\log_8 (2) + \log_8 (4) = \log_8 (2 \cdot 4) = \log_8 (8) = 1$$

d.) Logaritmo del cociente:

$$\log_a (b : c) = \log_a (b) - \log_a (c)$$

Ejemplo:

$$\log_3 (21) - \log_3 (7) = \log_3 (21 : 7) = \log_3 (3) = 1$$





e.) Logaritmo de una potencia:

$$\log_a (b)^n = n \cdot \log_a (b)$$

Ejemplo:

Si $\log_2 (3) = m$, entonces:

$$\log_2 (81) = \log_2 (3)^4 = 4 \cdot \log_2 (3) = 4m$$

f.) Logaritmo de una raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{b^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_a (b)$$

Ejemplo:

$$\log_7 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3} \cdot \log_7 (2)$$





g.) Cambio de base:

$$\log_a (b) = \frac{\log_c (b)}{\log_c (a)}$$

Ejemplo:

$$\log_{27} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 27} = \frac{2}{3}$$

Errores frecuentes

$$\log_a (b) \cdot \log_a (c) \neq \log_a (b) + \log_a (c)$$

$$\frac{\log_c (b)}{\log_c (a)} \neq \log_c (b) - \log_c (a)$$





Logaritmo Decimal

Son aquellos cuya base es 10. La base puede no escribirse.

$$\log_{10}(b) = \log(b)$$

Ejemplo:

$$\log_{10}(100) = \log(10^2) = 2$$

$$\log_{10}(1.000) = \log(10^3) = 3$$

$$\log_{10}(0,001) = \log(10^{-3}) = -3$$





Función Logarítmica

Definición:

La inversa de una función exponencial de base **a**, se llama función logarítmica de base **a** y se representa por:

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$$

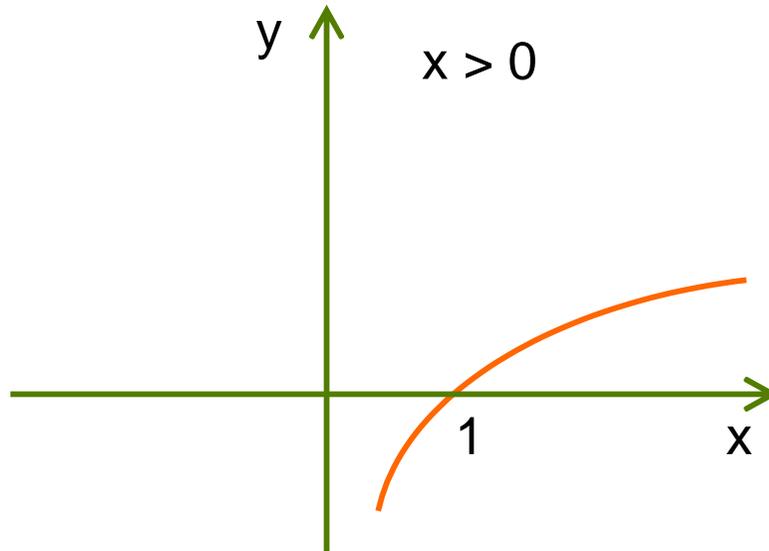
(Con $a > 0$, $a \neq 1$).





Ley de Crecimiento y Decrecimiento Logarítmico

a.) Si $a > 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es creciente para $x > 0$



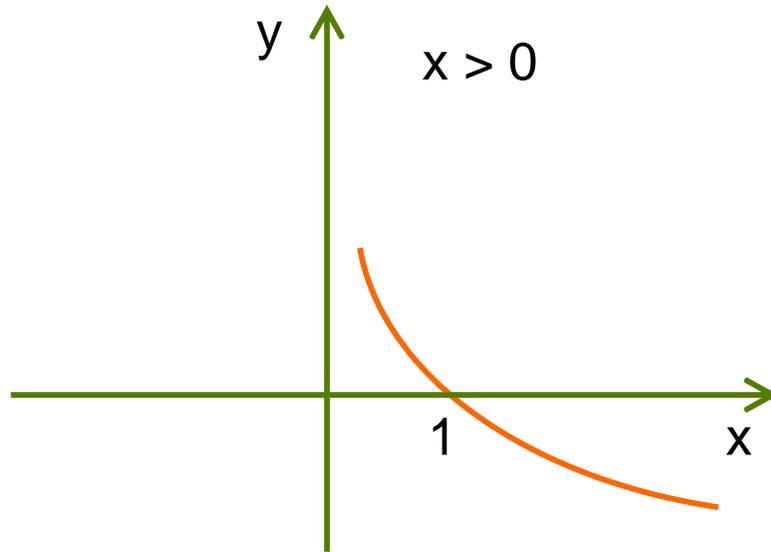
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$$

$$\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$$





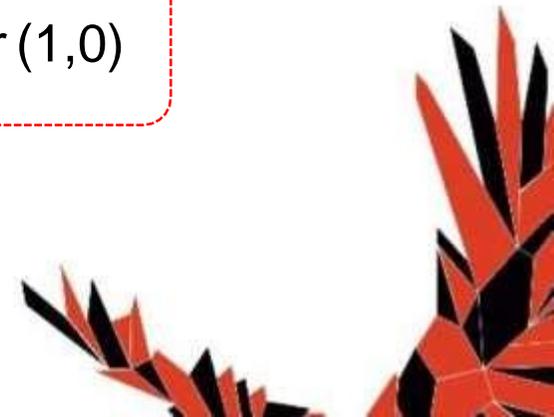
b.) Si $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a(x)$ es decreciente para $x > 0$



Dom (f) = \mathbb{R}^+

Rec (f) = \mathbb{R}

Notar que la gráfica de $f(x) = \log_a x$ pasa por $(1,0)$





Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

Ecuación exponencial:

Son aquellas ecuaciones, en las que la incógnita se encuentra en el exponente.

a.) Bases iguales:

Si $a^b = a^c$, entonces $b = c$

(Esto es válido para todo a , b y c , distinto de cero).

Ejemplo:

$$\text{Si } 3^x = 81 \quad \Rightarrow \quad 3^x = 3^4 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$





b.) Bases distintas:

Si $a^b = b^c$ entonces aplicamos logaritmos.

Ejemplo:

Si $a^x = b^c$ entonces, aplicando logaritmos:

$$\log (a^x) = \log (b^c)$$

$$x \cdot \log (a) = c \cdot \log (b)$$

$$x = \frac{c \cdot \log(b)}{\log(a)}$$





Ecuación logarítmica:

$$\text{Si } \log_c (a) = \log_c (b) \text{ entonces } a = b$$

Esto es válido para todo a , b y c , mayores que cero y $c \neq 1$

Ejemplo:

$$\log (5x) = 2$$

$$\log (5x) = \log (100)$$

$$5x = 100$$

$$x = 20$$





Algunos tipos de funciones

Logaritmo
 $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
 $a \neq 1, a > 0, b > 0$

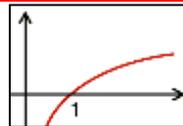
Propiedades

Ecuaciones

Planteo

Función logarítmica
 $f(x) = \log_a x$
 $x > 0$

Gráfica



Características

Dominio y
Recorrido

Intersecciones

$a \neq 1,$
 $a > 0$

Función exponencial
 $f(x) = a^x$

Gráfica



Características

Dominio y
Recorrido

Intersecciones



NORTH AMERICAN COLLEGE

HACIA UN FUTURO CON FE

BUILD YOUR FUTURE WITH FAITH

MUCHAS GRACIAS

